

# מתמטיקה מתקדמת



## תוכן העניינים

|    |                          |    |
|----|--------------------------|----|
| 1. | אינטגרציה בחלקים         | 1  |
| 2. | שיטת ההצבה באינטגרלים    | 5  |
| 3. | טורי חזקות               | 8  |
| 4. | מספרים מרוכבים (ללא ספר) | 11 |
| 5. | פונקציות אלמנטריות       | 14 |
| 6. | פונקציות אנליטיות        | 22 |
| 7. | התמרת פורייה             |    |

# מתמטיקה מתקדמת

פרק 1 - אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים ..... 1

## אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-23 :

$$\int x \sin x dx \quad (3) \quad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \quad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6) \quad \int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \quad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9) \quad \int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12) \quad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \quad \int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15) \quad \int x \arctan x dx \quad (14) \quad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18) \quad \int \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \quad \int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21) \quad \int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \quad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23) \quad \int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

$$(24) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int x^n e^x dx \text{ כאשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(25) \text{ חשבו את } \int x^4 e^x dx.$$

$$(26) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int \cos^n x dx \text{ כאשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(27) \text{ חשבו את } \int \cos^4 x dx.$$

(28) מצאו נוסחת נסיגה עבור  $\int \sin^n x dx$  כאשר  $n$  טבעי.

(29) חשבו את  $\int \sin^4 x dx$ .

(30) מצאו נוסחת נסיגה עבור  $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$  כאשר  $n$  טבעי.

(31) חשבו את  $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$ .

(32) חשבו את האינטגרלים  $\int e^{ax} \cos bxdx$ ,  $\int e^{ax} \sin bxdx$ .

## תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left( \ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$x \cos x + \sin x + c \quad (3)$$

$$\left( \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (4)$$

$$-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c \quad (5)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (6)$$

$$x \ln x - x + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (8)$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c \quad (9)$$

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{5} \left( \frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln |x-2| \right) \right) + c \quad (11)$$

$$x \tan x + \ln |\cos x| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (13)$$

$$\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c \quad (14)$$

$$\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left( \frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c \quad (15)$$

$$x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (16)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (17)$$

$$-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c \quad (18)$$

$$\frac{e^{2x} \left( -\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c \quad (19)$$

$$\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c \quad (20)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4} (\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5 (\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx \right\} \quad (28)$$

$$\frac{1}{4} (-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5 (x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left( \frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx = e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}, \quad \int e^{ax} \sin bxdx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \quad (32)$$

# מתמטיקה מתקדמת

פרק 2 - שיטת ההצבה באינטגרלים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה ..... 5

## אינטגרלים בשיטת ההצבה

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \quad \int 2x^3 \cos(x^2+1) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \quad \int \ln^3 x dx \quad (14) \quad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \quad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \quad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \quad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

## תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left( \frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^3+4})^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left( \frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left( x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left( x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2+1) + \cos(x^2+1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left( \frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left( \ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$

$$\ln |\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left( -\frac{1}{1-x^4} - \ln |1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + c \quad (23)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}{4} + c \quad (24)$$

# מתמטיקה מתקדמת

פרק 3 - טורי חזקות

תוכן העניינים

1. טור טיילור וטור מקלורן ..... 8
2. נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות ..... 10

## טור טיילור וטור מקלורן

### שאלות

בשאלות 1-24 מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב  $x=0$  (טור מקלורן) :

$$(1) \quad f(x) = \sin 2x \quad (2) \quad f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (3) \quad f(x) = \sinh x$$

$$(4) \quad f(x) = \sin^2 x \quad (5) \quad f(x) = \cos^2 x \quad (6) \quad f(x) = 2^x$$

$$(7) \quad f(x) = x \cos(4x^2) \quad (8) \quad f(x) = \ln(2-3x+x^2) \quad (9) \quad f(x) = \arcsin x$$

$$(10) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (11) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (12) \quad f(x) = \frac{1}{1+9x^2}$$

$$(13) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (14) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (15) \quad f(x) = \frac{x}{9+x^2}$$

$$(16) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (17) \quad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (18) \quad f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$(19) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad (20) \quad f(x) = \ln(1-x) \quad (21) \quad f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$(22) \quad f(x) = \ln(5-x) \quad (23) \quad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (24) \quad f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right)$$

הערות : לפתרון שאלות 15 ו-16, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.  
לפתרון סעיפים 18, 19, 23 ו-24 יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.  
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות 25-27 מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

$$(25) \quad f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (26) \quad f(x) = \tan x \quad (27) \quad f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$$

## תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (6) \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (4)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(-1 \leq x < 1) \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (8) \quad (-\infty < x < \infty) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (7)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10) \quad x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9)$$

$$(-1 < x < 1)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14) \quad (|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \quad (16) \quad (|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18) \quad (|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20) \quad (-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (22) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (24) \quad (|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (26) \quad 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{331}{720}x^6 + \dots \quad (25)$$

$$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \quad (27)$$

## נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

| טור מקלורן                                                                                                                                                     | תחום התכנסות                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$                                                      | $-\infty < x < \infty$                                                                                                     |
| $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$                                  | $-\infty < x < \infty$                                                                                                     |
| $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$                                      | $-\infty < x < \infty$                                                                                                     |
| $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$                                        | $-1 < x \leq 1$                                                                                                            |
| $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$                                     | $-1 \leq x \leq 1$                                                                                                         |
| $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$                                                                                        | $-1 < x < 1$                                                                                                               |
| $(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$<br>$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$ | $-1 \leq x \leq 1 \ (m > 0)$<br>$-1 < x \leq 1 \ (-1 < m < 0)$<br>$-1 < x < 1 \ (m \leq -1)$<br>$m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$ |

# מתמטיקה מתקדמת

פרק 4 - מספרים מרוכבים

תוכן העניינים

1. מספרים מרוכבים ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה מתקדמת

פרק 5 - פונקציות אלמנטריות

תוכן העניינים

- 1. אקספוננט מרוכב ..... 11
- 2. סינוס מרוכב ..... 12
- 3. קוסינוס מרוכב ..... 13

## אקספוננט מרוכב:

### שאלות:

- (1) פתרו את המשוואה  $e^z = -1$ .
- (2) הוכיחו כי לכל  $x$  ממשי מתקיים  $|e^{ix}| = 1$ .
- (3) ענו על הסעיפים הבאים:  
א. הראו כי אם  $\operatorname{Im}(z) \geq 0$  אז  $|e^{iz}| \leq 1$ .  
ב. הראו כי  $|e^z| = 1$  אם ורק אם  $\operatorname{Re}(z) = 0$ .
- (4) פתרו את המשוואה  $e^z = 1$ .
- (5) פתרו את המשוואה  $e^z = i$ .
- (6) פתרו את המשוואה  $e^z = 1 + i$ .
- (7) האם הפונקציה  $f(z) = e^z$  היא חח"ע?

### תשובות סופיות:

- (1)  $z = i \cdot \pi [2n + 1]$
- (2)  $\sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = 1$
- (3) א.  $|e^{iz}| = e^{-y} = \frac{1}{e^y} \leq \frac{1}{e^0} = 1$ .  
ב. הוכחה.
- (4)  $z_k = 2\pi i k \quad k \in \mathbb{Z}$
- (5)  $z_k = i\pi \left( 2k + \frac{1}{2} \right) \quad k \in \mathbb{Z}$
- (6)  $z_k = \frac{1}{2} \ln(2) + i\pi \left( 2k + \frac{1}{4} \right) \quad k \in \mathbb{Z}$
- (7) לא.

## סינוס מרוכב:

### שאלות:

- (1) פתרו את המשוואה  $\sin(z) = 2$ .
- (2) הוכיחו כי  $\sin(z) = \sin(x + iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$ .
- (3) פתרו את המשוואה  $\sin(z) = 5$ .

### תשובות סופיות:

- (1) כל הפתרונות הם מהצורה הבאה:  $z_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$ , כאשר  $n$  מספר שלם.
- (2) הוכחה.
- (3)  $z_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - i \ln(5 \pm 2\sqrt{6})$

## קוסינוס מרוכב:

### שאלות:

(1) הוכיחו כי  $\cos(z) = \cos(x + iy) = \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y)$ .

(2) פתרו את המשוואה  $\cos(z) = 2$ .

(3) האם  $|\cos(z)| \leq 1$  לכל  $z$ ?

(4) פתרו את המשוואה  $\cos(\pi z) + \frac{3}{4}i = 0$ .

(5) הוכיחו כי לכל  $z \in \mathbb{C}$  מתקיים  $|\cos(z)| \leq \frac{e^y + e^{-y}}{2}$  כאשר  $y = \operatorname{Im}(z)$ .

(6) פתרו את המשוואה  $\tan(z) = \frac{i}{3}$ .

### תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2)  $z_n = 2\pi n + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$

(3) לא.

(4)  $z_k = -\frac{1}{2} + 2k - i \frac{1}{\pi} \ln(2)$

(5) הוכחה.

(6)  $z_k = \pi k + i \frac{1}{2} \ln(2)$

# מתמטיקה מתקדמת

## פרק 6 - פונקציות אנליטיות

### תוכן העניינים

|    |                                |
|----|--------------------------------|
| 14 | 1. פונקציות מרוכבות.....       |
| 15 | 2. גבולות מרוכבים ורציפות..... |
| 16 | 3. נגזרות מרוכבות.....         |
| 17 | 4. משוואות קושי-רימן.....      |
| 20 | 5. פונקציות הרמוניות.....      |

## פונקציות מרוכבות:

### שאלות:

1) רשמו את הפונקציה  $f(z) = z \cdot \operatorname{Re}(z)$  , בצורה  $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  .

2) רשמו את הפונקציה  $f(z) = |z|^2$  , בצורה  $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  .

3) רשמו את הפונקציה  $f(z) = 2|z|^2 + i(\bar{z})^2$  , בצורה  $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  .

4) רשמו את הפונקציה  $f(z) = \frac{z}{1+|z|^2}$  , בצורה  $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  .

5) רשמו את הפונקציה  $f(z) = z^2 + \bar{z}$  , בצורה  $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  .

6) רשמו את הפונקציה  $f(x+iy) = \frac{x^3}{3} + i \cdot \left(-\frac{y^3}{3}\right)$  , בצורה  $f(z)$  , כאשר  $z = x+iy$  .

### תשובות סופיות:

1)  $f(z) = x^2 + i \cdot xy$

2)  $f(z) = x^2 + y^2 + i \cdot 0$

3)  $f(z) = 2[x^2 + xy + y^2] + i(x^2 - y^2)$

4)  $f(z) = \frac{x}{1+x^2+y^2} + i \cdot \frac{y}{1+x^2+y^2}$

5)  $f(z) = x^2 + x - y^2 + i \cdot (2xy - y)$

6)  $f = \frac{2z^3 + 6z(\bar{z})^2}{24}$

## גבולות מרוכבים ורציפות:

### שאלות:

מצאו את הגבולות הבאים (אם קיימים):

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z} = ? \quad (1)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^4}{|z|^4} = ? \quad (2)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{z^2}} = ? \quad (3)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{z^4}} = ? \quad (4)$$

### תשובות סופיות:

$$\frac{1-ik}{1+ik} \quad (1)$$

$$\frac{(1+ik)^4}{(1+k)^2} \quad (2)$$

(3) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

(4) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

## נגזרות מרוכבות:

### שאלות:

(1) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה  $f(z) = \bar{z}$  גזירה. הראו עפ"י הגדרת הנגזרת כי  $f(z) = \bar{z}$  אינה גזירה ב- $z_0$  לכל  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

(2) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה  $f(z) = \operatorname{Re}(z)$  גזירה.

(3) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה  $f(z) = |z|^2$  גזירה.

(4) הוכיחו את משפט לופיטל:  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)}$

### תשובות סופיות:

- (1) הפונקציה לא גזירה.  
הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.
- (2) הפונקציה לא גזירה.
- (3) בראשית הצירים, והנגזרת שלה היא 0.
- (4) הוכחה.

## משוואות קושי-רימן:

### שאלות:

- (1) הראו כי  $f(z) = z^2 + \text{Im}(z)$  אינה גזירה לכל  $z$ .
- (2) הראו כי  $f(z) = xy + i(x^2 + y^2)$  אינה גזירה בכל הנקודות בהן  $z \neq 0$ , אך כן גזירה בנקודה  $z = 0$  (לפי הגדרה).
- (3) מצאו מספרים ממשיים  $a, b$  כך שהפונקציה  $f(z) = e^{ax} \cos(3y) + i(-e^{-3x} \sin(by))$  תהיה גזירה בכל נקודה.

- (4) נתון כי  $f(z) = \frac{z}{z}$  אינה רציפה ב  $z = 0$ .  
מצאו את כל הנקודות (אם קיימות) בהן הפונקציה גזירה.

**משפט קושי-רימן: הוכחה (הפתרון בסרטון)**  
אם  $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  גזירה ב-  $z_0 = x_0 + iy_0$ , אז מתקיימות משוואות קושי-רימן בנקודה זו, כלומר:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$$

$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

- (5) נניח כי  $f(z)$  גזירה בתחום  $D$ , ונניח כי  $\text{Re}\{f(z)\} = 0$  לכל  $z \in D$ . הוכיחו כי  $f(z)$  קבועה.
- (6) נניח כי  $f(z)$  פונקציה גזירה שאינה קבועה בתחום  $D$ .  
נגדיר  $g(z) = \overline{f(z)}$  לכל  $z \in D$ .  
הוכיחו כי  $g(z)$  אינה גזירה בכל  $D$ .
- (7) נתונה הפונקציה  $f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$  הוכיחו את הטענות הבאות:
- א. הפונקציה אינה רציפה בראשית.
- ב. משוואות קושי-רימן מתקיימות בראשית.

(8) נניח כי  $f(z)$  אנליטית בתחום  $H^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ .

הוכיחו כי  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$  אנליטית בתחום  $H^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < 0\}$ .

(9) הוכיחו כי  $f(z) = e^{\text{Re}(z)}$  אינה גזירה בשום נקודה במישור המרוכב.

(10) נתונה הפונקציה  $f(z) = cx^2 - xy + ixy^2$ , כאשר  $c$  קבוע מרוכב כלשהו.

נתון כי  $f(z)$  גזירה בנקודה  $1+i$ .

מצאו את הקבוע  $c$  ואת כל הנקודות בהן הפונקציה גזירה.

(11) נתונה הפונקציה  $f(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ .

קבעו האם הפונקציה  $f(z)$  אנליטית בחצי המישור הימני  $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) > 0\}$ .

(12) נתונה הפונקציה  $f(z) = e^{\frac{x^2-y^2}{2}} [\cos(xy) + i \cdot a \sin(xy)]$ .

עבור אילו ערכי  $a$  זוהי פונקציה הולומורפית (אנליטית) בכל המישור?

(13) נניח כי  $g(z)$  הולומורפית בתחום  $\overline{D(0,1)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ ,

ומקיימת  $\forall |z| \leq 1 \quad |g(z)| = 1$ .

הוכיחו כי  $g(z)$  קבועה.

הדרכה: ניתן לכתוב את  $g(z)$  באופן הבא:  $g(z) = e^{i \cdot h(x,y)}$ .

(14) נניח כי  $R > 0$  ונתונה הפונקציה  $f: D(0,R) \rightarrow \mathbb{C}$  גזירה בכל התחום.

נגדיר:  $g(z) = \overline{f\left(\frac{R}{\bar{z}}\right)}$ .

מצאו תחום בו  $g(z)$  מוגדרת, ובדקו אם היא גזירה שם.

## תשובות סופיות:

$$u'_y = -2y + 1, \quad v'_x = 2y \quad (1)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$a = -3, \quad b = 3 \quad (3)$$

$$x = 0, \quad y = 0 \quad (4)$$

(5) הוכחה

(6) הוכחה

(7) א. הוכחה ב. הוכחה

(8) הוכחה

(9) הוכחה

$$y = 0, \quad y = 1, \quad y = 0.5$$

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 0.25, \quad c = a + i \cdot b = \frac{3}{2} \quad (10)$$

$$z = 0, \quad z = 1 + i, \quad z = 0.25 + 0.5 \cdot i$$

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad u_y = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (11)$$

$$a = 1 \quad (12)$$

(13) הוכחה

$$A = \{z \mid |z| > 1\} \quad (14)$$

## פונקציות הרמוניות:

### שאלות:

- (1) הראו כי הפונקציה  $x^3 - 3xy^2$ , היא פונקציה הרמונית בכל המישור.
- (2) הראו כי הפונקציה  $x^2 - y^2$ , היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו לה צמודה הרמונית.
- (3) הראו כי הפונקציה  $f(z) = xy + i(x^2 + y^2)$ , היא פונקציה גזירה בראשית-הצירים, אך החלק המדומה שלה אינו פונקציה הרמונית. האם  $f(z)$  הולומורפית בראשית?
- (4) הראו כי הפונקציה  $u(x, y) = \sin(x) \cosh(y)$ , היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה  $v(x, y)$  המקיימת  $v(0, 0) = 2$ .  
רמז:  $f(z) = \sin(z)$ .
- (5) הראו כי הפונקציה  $u(x, y) = \cos(x) \sinh(y)$ , היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו פונקציה הולומורפית כך שמתקיים  $u(x, y) = \operatorname{Re}\{f\}$ .
- (6) הראו כי הפונקציה  $v(x, y) = e^y \sin(x)$ , היא פונקציה הרמונית במישור, מצאו לה פונקציה צמודה הרמונית  $u(x, y)$  ופונקציה שלמה  $f(z)$ , כך שמתקיים:  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ .
- (7) הראו כי הפונקציה  $u(r, \theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos(\theta)$ , היא פונקציה הרמונית בתחום  $r \neq 0$ .  
רמז:  $u(r, \theta)$  תקרא הרמונית אם היא מקיימת  $r^2 u_{rr}'' + r u_r' + u_{\theta\theta}'' = 0$ .
- (8) נתון כי  $u(r, \theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos(\theta)$  היא פונקציה הרמונית בתחום  $r \neq 0$ . מצאו לה צמודה הרמונית בתחום זה.

(9) הוכיחו כי  $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ , היא פונקציה הרמונית ומצאו לה צמודה הרמונית.

(10) תהי  $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  פונקציה שלמה. הוכיחו כי  $g(x, y) = u(x, y)^2 - v(x, y)^2$  פונקציה הרמונית.

(11) תהי  $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  פונקציה שלמה. הוכיחו כי  $g(x, y) = \sin[u(x, y)] \cdot \cosh[v(x, y)]$  פונקציה הרמונית.

(12) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה  $u(x, y) = \varphi\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right)$

(כאשר  $\varphi \in C^2$  פונקציה לא ידועה)?  
אם כן, מצאו אותן.

(13) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה  $u(x, y) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

(כאשר  $\varphi \in C^2$  פונקציה לא ידועה)?  
אם כן, מצאו אותן.

(14) הראו כי הפונקציה  $\sinh(x) \cos(y)$  היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה.

## תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

# מתמטיקה מתקדמת

## פרק 7 - התמרת פורייה

### תוכן העניינים

|                                         |    |
|-----------------------------------------|----|
| 1. מבוא כללי.....                       | 22 |
| 2. נוסחת כיווץ והזזה.....               | 24 |
| 3. נוסחת הנגזרת.....                    | 26 |
| 4. נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה..... | 27 |
| 5. נוסחת המומנט.....                    | 29 |
| 6. נוסחת ההתמרה ההפוכה.....             | 31 |
| 7. נוסחת התמרה כפולה..... (ללא ספר)     |    |
| 8. משפט פלנשראל.....                    | 32 |
| 9. משפט הקונבולוציה.....                | 33 |
| 10. תרגילים מסכמים.....                 | 37 |

## מבוא כללי:

### שאלות:

$$(1) \quad \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{חשבו את התמרת פורייה של}$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(4) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 2 & 1 < |x| < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(5) \quad \text{הוכיחו כי התמרת פורייה של } f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ e^{bx} & x \leq 0 \end{cases} \text{ כאשר } a, b > 0 \text{ קבועים הינה}$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right]$$

$$(6) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה של}$$

$$(7) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(8) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(9) \quad \text{הוכיחו התמרת פורייה של } f(x) = \begin{cases} e^{2ix} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ הינה } f(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin[2-\omega]}{2-\omega}$$

$$(10) \quad f(x) = \begin{cases} \sin(x) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה של}$$

$$(11) \quad \text{חשבו את התמרת פורייה של } f(x) = \begin{cases} x & |x| < a \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ עבור } a > 0$$

$$(12) \quad \text{האם קיימת } f \in L^1_{PC}(\mathbb{R}) \text{ כך ש-} f(\omega) = \begin{cases} 1-|\omega| & |\omega| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

## תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{1 - \cos(\omega)}{\pi\omega^2} \quad (2)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi(1+i\omega)} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{2\sin(2\omega) - \sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (4)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (5)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\omega) + i[\cos(\omega) - 1]}{\omega} \quad (6)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + e^{-i\omega} - 2e^{-i2\omega}}{i\omega} \quad (7)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(1-i)\omega} - 1}{1-i\omega} \quad (8)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (9)$$

$$f(\omega) = -i \cdot \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin([1-\omega])}{1-\omega} - \frac{\sin([1+\omega])}{1+\omega} \right\} \quad (10)$$

$$f(\omega) = -\frac{1}{\pi} i \frac{\sin(\omega a) - \omega a \cos(\omega a)}{\omega^2} \quad (11)$$

$$\omega = \pm \frac{1}{2} \quad \text{לא. אינה רציפה בנקודות} \quad (12)$$

## נוסחת כיווץ והזזה:

### שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של  $\chi_{[-r,r]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-r,r] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$  כאשר  $r > 0$ .

(2) מצאו התמרת פורייה של  $f(x) = e^{-4x^2-4x-1}$  על ידי שימוש בעובדה

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{כי}$$

(3) נתונה פונקציה  $g(x) \in G(R)$  בעלת התמרת פורייה  $g(\omega)$ .

מצאו פונקציה  $f(x)$  (כתלות ב- $g(x)$ ) בעלת התמרת פורייה  $g(\omega)\cos(\omega)$ .

(4) מצאו התמרת פורייה של  $f(x) = e^{-ax^2}$  כאשר  $a > 0$ .

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{רמז:}$$

(5) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא  $f(\omega) = \cos(4\pi\omega) \cdot \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$ .

$$F\{\chi_{[-1,1]}(x)\} = \frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad \text{רמז:}$$

## תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega \cdot r)}{\pi \omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{e^{\frac{i\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{16}} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{g(x+1) + g(x-1)}{2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{(\omega)^2}{4a}} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} 1 & 4\pi - 2 \leq x \leq 4\pi + 2 \text{ or } -4\pi - 2 \leq x \leq -4\pi + 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (5)$$

## נוסחת הנגזרת:

### שאלות:

(1) נניח כי  $f(x) \in G$ , גזירה, מקיימת  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ,  $f'(x) \in G$  ו-  $f(\omega) = \frac{\omega}{1 + \omega^{30}}$ . מצאו התמרת פורייה של  $f'(x) \cos(2x)$ .

(2) יהי  $a$  ממשי כלשהו. הוכיחו כי  $F \left\{ \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} \right\}_\omega = \left( -\frac{1}{2} \right) (i\omega) \frac{1}{2|a|} e^{-|a\omega|}$ .

(3) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא  $f(\omega) = \omega^2 e^{-|\omega|}$ . רמז:  $F \left\{ \frac{1}{1+x^2} \right\} = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ .

### תשובות סופיות:

$$\frac{i \cdot \frac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}} + i \cdot \frac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}}{2} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

$$f(x) = (-2) \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \quad (3)$$

## נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה:

שאלות:

$$(1) \quad F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\}_{(\omega)} = \frac{1}{\pi i} \frac{2c \cdot \omega}{\left[1 + (\omega - c)^2\right] \left[1 + (\omega + c)^2\right]} \quad \text{הוכיחו כי התמרת פורייה של}$$

$$(2) \quad f(\omega) = \frac{\sin(\omega - 1)}{\omega - 1} - \frac{\sin(\omega + 1)}{\omega + 1} \quad \text{מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא}$$

$$(3) \quad \text{הוכיחו כי התמרת פורייה של } g(x) = \begin{cases} \sin(ax)e^{-bx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{כאשר } a, b > 0 \text{ קבועים,}$$

$$\text{הינה } g(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{bi - (\omega - a)} - \frac{1}{bi - (\omega + a)} \right]$$

$$(4) \quad \text{מצאו התמרת פורייה של } g(x) = e^{-|x|} \cos(2x) \quad \text{על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה}$$

$$\text{כי } F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1 + \omega^2)}$$

$$(5) \quad \text{מצאו התמרת פורייה של } g(x) = e^{-|x|} \sin^2(3x) \quad \text{על ידי שימוש בנוסחת מודולציה}$$

$$\text{ובעובדה כי } F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1 + \omega^2)}$$

$$(6) \quad \text{נניח כי } f(x) \in G(R) \text{ ונגדיר } g(x) = f(3x - 2) \cdot \cos(x) \text{ . בטאו את } g(\omega) \text{ על ידי } f(\omega)$$

$$(7) \quad \text{מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא } f(\omega) = e^{3i\omega} \cdot e^{-|\omega - 2|} \text{ . רמז: } F\left\{\frac{1}{1 + x^2}\right\} = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

$$(8) \quad \text{תהי } H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } H(x)e^{-ax} \quad \text{כאשר } a > 0$$

$$\text{ב. } H(x)e^{-ax} \cos(bx) \quad \text{כאשר } a, b > 0$$

$$\text{ג. } H(x)e^{-ax} \sin(bx) \quad \text{כאשר } a, b > 0$$

## תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$f(x) = 2\pi i \cdot \chi_{[-1,1]}(x) \cdot \sin(x) \quad (2)$$

(3) הוכחה.

$$F\{e^{-|x|} \cos(2x)\} = \frac{1}{2\pi(1+[\omega+2]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-2]^2)} \quad (4)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} - \left[ \frac{1}{2\pi(1+[\omega+6]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-6]^2)} \right] \quad (5)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{6} \left[ e^{-\frac{2}{3}(\omega+1)} f\left(\frac{\omega+1}{3}\right) + e^{-\frac{2}{3}(\omega-1)} f\left(\frac{\omega-1}{3}\right) \right] \quad (6)$$

$$F\left\{e^{2i[x+3]} \frac{2}{1+[x+3]^2}\right\} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2\pi(a+i\omega)} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \quad \text{ב.}$$

$$\frac{1}{4\pi i} \left( \frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \quad \text{ג.}$$

## נוסחת המומנט:

### שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של  $g(x) = \begin{cases} x & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$  על ידי שימוש

$$.F\{x \cdot f(x)\} = i \frac{d}{d\omega} f(\omega)$$

(2) מצאו התמרת פורייה של  $g(x) = x^2 e^{-x^2}$  על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$.F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{כי}$$

(3) מצאו התמרת פורייה של  $g(x) = x \cdot e^{-|x|}$  על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$.F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} \quad \text{כי}$$

(4) מצאו את התמרת פורייה של  $f(x) = e^{-x^2}$ .

(5) מצאו התמרת פורייה של  $f(x) = 8x^3 e^{\frac{-4(x+1)^2+5}{3}}$ .

(6) תהי  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^5} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$

הוכיחו כי  $f(\omega)$  גזירה ברציפות 3 פעמים.

(7) נתון כי התמרת פורייה של  $f \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$  רציפה היא  $f(\omega) = \frac{1}{1+|\omega|}$ .

הוכיחו כי האינטגרל  $\int_{-\infty}^{\infty} |x \cdot f(x)| dx$  מתבדר.

## תשובות סופיות:

$$i \cdot \frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\pi \omega^2} \quad (1)$$

$$F \left\{ x^2 e^{-x^2} \right\} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{\omega^2}{2} \right) e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (2)$$

$$F \left\{ x \cdot e^{-|x|} \right\} = -\frac{i}{\pi} \frac{2\omega}{(1+\omega^2)^2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (4)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{256} \sqrt{\frac{3}{\pi}} (27i\omega^3 + 216\omega^2 - 792i\omega - 1088) e^{i\omega - \frac{3\omega^2}{16} - \frac{5}{3}} \quad (5)$$

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

## נוסחת ההתמרה ההפוכה:

### שאלות:

(1) חשבו  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^2)} d\omega$  לכל  $x$  ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

(2) חשבו  $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{\sin(\omega) \cos(\omega x)}{\pi \omega} d\omega$  לכל  $x$  ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

### תשובות סופיות:

(1) ראו סרטון.

$$(2) \begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ 1 & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1, x = -1 \end{cases}$$

## משפט פלנשראלי:

### שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של  $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$  עבור  $a > 0$ .

ב. חשבו את האינטגרל  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} \frac{\sin(bx)}{x} dx$  עבור  $a, b > 0$ .

(2) הוכיחו כי  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{4}$ . תוכלו להיעזר בעובדה:  $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \frac{1}{2}e^{-|\omega|}$ .

(3) הוכיחו כי  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x(1+4x^2)} dx = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$ .

(4) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה  $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R}) \cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$  כך ש-  $f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+|\omega|}}$ .

### תשובות סופיות:

(1) א.  $f(\omega) = \frac{\sin(\omega a)}{\pi \omega}$  ב.  $\pi \cdot \min\{a, b\}$

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

## משפט הקונבולוציה:

### שאלות:

$$(1) \quad \text{חשבו את הקונבולוציה } (\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]})_{(x)}$$

$$\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{תזכורת:}$$

רמז: חלקו למקרים.

$$(2) \quad \text{חשבו את הקונבולוציה } (f * f)_{(x)} \quad \text{כאשר } f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

רמז: חלקו למקרים  $x > 0$  ו-  $x \leq 0$ .

$$(3) \quad \text{מצאו פונקציה } f \in G \text{ כך ש- } f(\omega) = \left( \frac{\sin \omega}{\omega} \right)^2$$

$$(4) \quad \text{נסמן ב- } E \text{ את מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים } f(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad \text{וגם} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

מצאו פונקציה  $g(x)$  כך שלכל  $f(t) \in E$  מתקיים השוויון.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f''(t)) g(x-t) dt = 2f(x)$$

$$(5) \quad \text{נגדיר } f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}. \quad \text{מצאו את הקונבולוציה } (f * g)_{(x)}.$$

$$\text{תזכורת: } F\left\{ \frac{1}{x^2 + a^2} \right\} = \frac{1}{2a} e^{-a|\omega|}$$

$$(6) \quad \text{ענה על הסעיפים הבאים:}$$

$$א. \quad \text{חשבו התמרת פורייה של } (1+|x|)e^{-|x|}.$$

$$ב. \quad \text{פתרו את המשוואה האינטגרלית } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} f(t) dt = e^{-|x|} + |x|e^{-|x|}.$$

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הקונבולוציה  $(f * f)_{(x)}$  כאשר  $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ .

ב. הוכיחו כי  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$ .

(8) חשבו את הקונבולוציה  $(f * f)_{(x)}$  כאשר  $f(x) = \chi_{[1,2]}(x)$ .

(9) חשבו את הקונבולוציה  $(f * f)_{(x)}$  כאשר  $f(x) = \chi_{[0,2]}(x)$ .

(10) חשבו את הקונבולוציה  $(\chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x))_{(x)}$ .

(11) חשבו את הקונבולוציה  $(e^{-x^2} * e^{-x^2})_{(x)}$ .

א. לפי ההגדרה.

ב. על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה.

הערה: תוכלו להיעזר בעובדה  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

(12) מצאו פתרון למשוואה האינטגרלית  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)dt = e^{\frac{-3(x+1)^2}{2}}$ .

(13) נניח כי  $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$  רציפה ומקיימת את המשוואה האינטגרלית

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy \equiv 0$$

הוכיחו כי  $f(x) \equiv 0$ .

## תשובות סופיות:

$$\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x \in [-2, 0] \\ 2-x & x \in [0, 2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x \in [-2, 0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x \in [0, 2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3)$$

$$g(x) = e^{-|x|} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{x^2 + 9} \quad (5)$$

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{ב. הוכחה.} \quad \text{א.} \quad \frac{2}{\pi(1+\omega^2)^2} \quad (6)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 2 \\ 2-x & 1 < x < 2 \\ x & 0 < x < 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{א.} \quad \text{ב. הוכחה.} \quad (7)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4-x & 3 < x < 4 \\ x-2 & 2 < x < 3 \\ 0 & x < 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4 - x & 2 < x < 4 \\ x & 0 < x < 2 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\left( \chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x) \right)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 3 \\ 3 - x & 2 < x < 3 \\ x - 1 & 1 < x < 2 \\ 0 & x < 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ב.}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{6}{\pi}} e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \quad (12)$$

(13) הוכחה.

## תרגילים מסכמים:

### שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ב. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה

$$g(x) = \begin{cases} \cos(x) & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ג. חשבו את האינטגרל

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi x) \sin(x)}{(1-x^2)} dx$$

ד. חשבו את האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1-x^2)^2} \sin^2(\pi x) dx$$

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של  $f(x) = x \cdot e^{-|x|}$

ב. מצאו את כל הפונקציות  $h(y)$  המקיימות

$$\int_{-\infty}^{\infty} h'(y) e^{-|x-y|} dy = x \cdot e^{-|x|}$$

(3) יהי  $A > 0$  קבוע. נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq A \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ידוע כי ישנה פונקציה  $g(x) \in G$  המקיימת  $g(\omega) = f(\omega) f(-\omega)$ . מצאו במפורש את  $g(x)$ .

(4) נניח כי  $f(x) \in C^2(-\infty, \infty)$  כך ש-  $f'(x), x \cdot f'(x), f''(x) \in L^1_{PC}(-\infty, \infty)$  ומתקיים

$$f''(x) + x \cdot f'(x) + f(x) = 0 \quad \text{לכל } x \text{ ממשי.}$$

א. הוכיחו כי  $f(x) \in L^1_{PC}(-\infty, \infty)$

ב. חשבו את  $f(\omega)$  אם נתון כי  $f(0) = 1$

ג. מצאו את  $f(x)$

$$(5) \quad f(x) = \begin{cases} 2 & |x| \leq 1 \\ 4 & 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{תהי}$$

א. חשבו את  $f(\omega)$ .

ב. חשבו את האינטגרל  $\int_0^\infty \frac{[2\sin(2t) - \sin(t)]^2}{t^2} dt$ .

ג. חשבו את האינטגרל  $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{2\sin(2t) - \sin(t)}{\pi t} \cos(t) dt$ .

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{\pi^2} & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

ב. חשבו את האינטגרלים:  $\int_0^\infty \left( \frac{\sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x)}{\pi^3 x^3} \right)^2 dx$

ו-  $\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x)}{\pi^3 x^3} \cos(x) dx$

(7) נגדיר  $\phi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ . הוכיחו כי המערכת  $\{\phi(x-n)\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$  מהווה מערכת

אורתונורמלית ב-  $L^2_{PC}(-\infty, \infty)$ .

(8) תהי  $f \in G$  פונקציה כך ש-  $f' \in G$  פונקציה רציפה. מצאו פונקציה  $g \in G$

המקיימת את המשוואה  $g(t) = \int_{-\infty}^t e^{u-t} g(u) du + f'(t)$ .

(9) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא  $f(\omega) = \frac{1}{(1+\omega^2)^2}$ .

(10) פתרו את המשוואה האינטגרלית  $\int_{-\infty}^\infty \frac{f(t)}{(x-t)^2 + b^2} dt = \frac{x}{(x^2 + a^2)^2}$

$$(11) \text{ נגדיר } f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(\omega - t) \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(t) e^{i\omega x} dt d\omega$$

מצאו ביטוי מפורש (ללא אינטגרלים) עבור  $f(x)$ .

$$\text{תזכורת: } \chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [a,b] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$(12) \text{ השתמשו במשפט פלנשראל על מנת לחשב את האינטגרל } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(a^2 + x^2)(x^2 + b^2)} dx$$

כאשר  $a, b > 0$ .

$$(13) \text{ מצאו את התמרת הפורייה של } f(x) = e^{-(x^2 + 2x + 5)}$$

$$(14) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \text{ לכל } a, b > 0 \text{ קבועים.}$$

$$(15) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x) \cos(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8e} \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$$

$$(16) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\infty} \sin^3(x) x e^{-x} dx = \frac{9}{25}$$

## תשובות סופיות:

$$f(\omega) = -i \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(\omega\pi) \cdot \frac{2}{1-\omega^2} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\omega \sin(\omega\pi)}{1-\omega^2} \quad \text{ב.} \quad \frac{\pi^2}{2} \quad \text{ד.} \quad \frac{\pi}{2} \sin(1) \quad \text{ג.}$$

$$-h(y) = e^{-|y|}, \quad h(y) = -e^{-|y|} \quad \text{ב.} \quad -\frac{2i\omega}{\pi(1+\omega^2)^2} \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{(A+x)^3}{3} - \frac{(A+x)^2}{2} x \right) & -A < x < 0 \\ \frac{1}{2\pi} \left( \frac{A^3}{3} - \frac{A^2}{2} x + \frac{x^3}{6} \right) & 0 < x < A \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3)$$

$$\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ג.} \quad e^{-\frac{\omega^2}{2}} \quad \text{ב.} \quad \text{א. הוכחה.} \quad (4)$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad \text{ג.} \quad \frac{5\pi}{2} \quad \text{ב.} \quad \frac{4 \cdot \sin(2\omega) - 2 \cdot \sin(\omega)}{\pi\omega} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{\pi^2} \right) \quad \text{ג.} \quad \frac{1}{15} \quad \text{ב.} \quad 2 \frac{\sin(\pi\omega) - \pi\omega \cos(\pi\omega)}{\pi^3 \omega^3} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (7)$$

$$g(t) = f(t) + f'(t) \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^x (1-x) & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} e^{-x} (1+x) & x > 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{a} \frac{(a-b)x}{(x^2 + (a-b)^2)^2} \quad (10)$$

$$f(x) = 4 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2} \quad (11)$$

$$\frac{\pi}{a+b} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \frac{\omega}{b^2 + \omega^2} d\omega \quad (12)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{e^4} \cdot e^{i\omega} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (13)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (14)$$

15) הוכחה.

16) הוכחה.